GROUPE B

E.N.S. SEVRES & ULM 1979

MATHÉMATIQUES

Il est possible, recommandé et parfois dangereux de traiter beaucoup de questions avec peu de calculs.

Une habitation est à une température x, fonction réelle dérivable du temps t (dérivée notée x'), sous l'action de l'air extérieur à une température θ supposée constante et de radiateurs à une température y, fonction réelle dérivable du temps. Alors on a la relation : $x' = a(\theta - x) + b(y - x)$ où a et b sont des constantes strictement positives.

Les radiateurs sont chauffés à l'aide d'une chaudière et refroidis dans l'habitation avec la relation : $y' = p + c(x - y)$ où c est une constante strictement positive et p une fonction donnée du temps (puissance de la chaudière).

I

On suppose que p est une constante. Démontrer, éventuellement dans un ordre différent, les résultats suivants :

1° Pour t tendant vers $+\infty$, x possède une limite λ_p et toutes ses dérivées successives ont une limite nulle.

2° Il existe une solution x et une seule telle que, pour t_0, x_0 et x_0' donnés, on ait $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_0'$.

3° Pour tout intervalle ouvert non vide de la droite réelle,

a. Il n'existe qu'une seule solution x constante sur cet intervalle,

b. Si x n'est pas constante, elle possède au plus un extremum et il en est de même de toutes ses dérivées successives.

4° Avec les notations de 2°, si $x_0'(x_0 - \lambda_p)$ est strictement positif, l'équation $x(t) = x_0$ possède une solution et une seule, soit t_1, strictement supérieure à t_0.

II

Écrire une équation différentielle du second ordre vérifiée par x. Avec les hypothèses et notations de I.4°, étudier cette équation, son produit par x' et les relations qui s'en déduisent par intégration sur un intervalle pour obtenir les résultats suivants :

1° Pour t compris entre t_0 et t_1,

a. $x'^2(t)$ est majoré par $x_0'^2$,

b. $|x(t) - x_0|$ est majoré par $\dfrac{2|x_0'|}{a+b+c}$ ou mieux, par $\dfrac{|x_0'|}{a+b+c}$,

c. $|x''(t)|$ est majoré par un terme B, combinaison linéaire de $|x_0'|$ et $|x_0 - \lambda_p|$ à coefficients strictement positifs.

2° $\dfrac{|x_0'|}{B} \leqslant t_1 - t_0 \leqslant \dfrac{2}{ac}\dfrac{x_0'}{x_0 - \lambda_p}$.

3° x_0' et $x_1' = x'(t_1)$ sont de signes contraires et vérifient :

$$\frac{2(a+b+c)}{3B}|x_0'|^3 \leqslant x_0'^2 - x_1'^2 \leqslant \frac{4(a+b+c)}{ac|x_0 - \lambda_p|}|x_0'|^3.$$

III

La chaudière est équipée d'un brûleur à pulvérisation de fuel qui ne possède que deux états stables : le repos et le régime maximum. On suppose qu'au temps t_0 le brûleur change d'état, soit

$$p(t) = \begin{cases} p_-, \text{ constante pour } t < t_0 \\ p_+, \text{ constante pour } t > t_0 \end{cases}$$

1° Si E_- est l'ensemble des solutions (x_-, y_-) des équations pour $p(t) = p_-$ quel que soit t et E_+ l'ensemble des solutions (x_+, y_+) pour $p(t) = p_+$, montrer que la continuité des fonctions x et y égales respectivement à :

.../...

x_- et y_- sur l'intervalle $]-\infty, t_0]$,

x_+ et y_+ sur l'intervalle $]t_0, +\infty[$,

définit une bijection entre E_+ et E_-.

2° Cette bijection peut-elle être un isomorphisme d'espaces vectoriels ?

3° Dans la suite du problème on considérera que les fonctions x et y ainsi définies par raccordement continu sont les solutions correspondant à une fonction p égale à p_- sur $]-\infty, t_0[$ et à p_+ sur $]t_0, +\infty[$. La même technique sera généralisée au cas où le brûleur change d'état aux instants $t_0, t_1 > t_0, t_2 > t_1$, etc. Que peut-on en déduire pour la fonction x' : existence, continuité, dérivabilité ?

IV

Pour réguler la température on commande le brûleur étudié précédemment par un thermostat, supposé idéal, selon la règle suivante :

$p(t) = P$, constante positive, si $x(t) < 20$,

$p(t) = 0$ si $x(t) > 20$,

et on suppose que l'on a : $\lambda_0 < 20 < \lambda_P$. Montrer que :

1° A l'exception d'un cas particulier que l'on exclura dans la suite, la donnée des valeurs de x et y à l'instant t_0 (avec la résolution au sens défini en III) détermine une suite de terme général t_n, instant du $n^{ième}$ changement d'état du brûleur postérieur à t_0.

2° Les suites de termes généraux $x'_n = x'(t_n)$ et $t_{n+1} - t_n$ ont une limite nulle (pour la deuxième ceci entraîne une usure très rapide du thermostat et du brûleur).

3° *a.* Il existe une constante strictement positive α telle que :

$$x'^2_n - x'^2_{n+1} \leqslant \alpha |x'_n|^3.$$

b. Pour $|x'_n|$ suffisamment petit, $(n+1)^2 x'^2_{n+1}$ est supérieur, soit à $n^2 x'^2_n$, soit à une constante strictement positive donnée.

c. La suite de terme général t_n est non bornée.

4° Lorsque t tend vers $+\infty$,

a. $x(t)$ possède une limite égale à 20 et $x'(t)$ une limite nulle,

b. Dans la mesure où les dérivées suivantes de x sont définies, elles n'ont pas de limite. (Le prouver au moins pour certaines d'entre elles.)

V

On considère le cas d'une habitation composée de k pièces de températures $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec des radiateurs de température y constante. La température de chaque pièce évolue sous l'action de l'air extérieur, des radiateurs et des températures des pièces voisines avec les relations :

$$x'_i = a_i(0 - x_i) + b_i(y - x_i) + \sum_{j=1}^{k} m_{ij}(x_j - x_i) \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, k$$

où a_i et b_i sont des constantes strictement positives et m_{ij} des constantes positives ou nulles (par convention commode $m_{ij} = 0$ si $i = j$).

1° Montrer que la forme quadratique sur $\mathbb{R}^k$ définie par

$$q(X) = \sum_{i=1}^{k} \left\{ (a_i + b_i) X_i + \sum_{j=1}^{k} m_{ij}(X_i - X_j) \right\} X_i$$

pour $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ dans $\mathbb{R}^k$, est positive non dégénérée.

2° *a.* Quelles relations peut-on établir entre une base de $\mathbb{R}^k$ orthonormée relativement à q et une base formée de vecteurs propres de la matrice A associée au système différentiel vérifié par les x_i, dans la mesure où il existe de telles bases ?

b. Que peut-on dire des valeurs propres de A ?

3° Montrer que, pour t tendant vers $+\infty$, toutes les fonctions x_i possèdent une limite et toutes leurs dérivées successives ont une limite nulle.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail